FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Y AGRIMENSURA
CATEDRA : CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA 1 (Última modificación 8-7-2015)

ESPACIO DE N DIMENSIONES

Un espacio es de n dimensiones, **cuando para determinar cada uno de sus puntos hacen falta los valores de n parámetros llamados Coordenadas del Punto** y que se representan por X_1, X_2, ... X_n

ESPACIO AFIN

Espacio AFIN de n dimensiones es el espacio entre cuyos puntos y los conjuntos de n números reales cualesquiera X_1, X_2, ... X_n llamados coordenadas del punto**, se puede establecer una correspondencia biunívoca.**

ESPACIO METRICO

Es un Espacio AFIN en el cual se introduce la manera de medir la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo.

ESPACIO EUCLIDIANO

Un Espacio es EUCLIDIANO y de dimensión n cuando :

1.- Es AFIN de dimensión n

2.- La distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo está definida por :

$$\boxed{d^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (X'_i - X_i)^2}$$

Llamando d (A,B) a la distancia entre los puntos A y B del E^2 se verifica que :

1) d (A,B) = 0 $\Leftrightarrow$ A = B
2) d (A,B) = d (B,A)
3) d (A,C) + d (C,B) $\geq$ d (A,B)

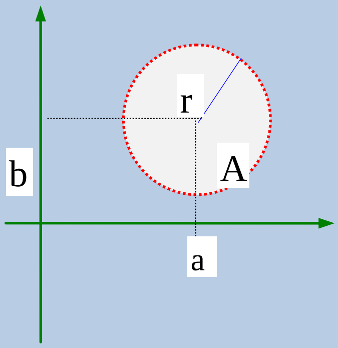
El espacio Euclidiano de n dimensiones se simboliza con E^n

CONJUNTOS PUNTUALES EN E^2

Disco abierto de centro A(a,b) y radio "r"

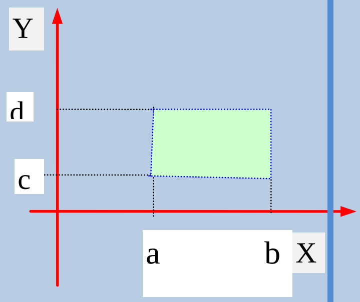
Es el conjunto de puntos del E^2 tal que :

S = {P(x,y) / $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ } o sea la d (P,A) < r



En el caso que sea menor o igual a r se tiene el disco cerrado

Intervalo rectangular abierto



Es el conjunto de puntos P(x,y) perteneciente al E^2 tal que

$S = \{P(x,y)/ \quad a < x < b \ \wedge \ c < y < d \}$

En el caso de menor o igual se tiene el intervalo rectangular cerrado

Entorno circular

Entorno circular del punto A(a,b) y radio r es el disco abierto de radio r y centro A(a,b) es decir es el conjunto de puntos del E^2 / $S = \{ P(x,y) / \ (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \}$ o sea la $d(P,A) < r$. Se simboliza con N (A,r)

Entorno circular reducido

Entorno circular reducido del punto A(a,b) y radio r es el disco abierto de radio r y centro A(a,b) excluyendo el punto A(a,b), es decir es el conjunto de puntos del E^2 tal que : $S = \{ P(x,y) / \ 0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \}$ o sea la $0 < d(P,A) < r$

Se simboliza con N' (A,r)

Entorno rectangular

Entorno rectangular del punto A(a,b) y semiamplitud "d" es el conjunto de puntos P(x,y) del E^2 tales que verifiquen :

$$|x - a| < d$$
$$|y - b| < d$$

Entorno rectangular reducido

Es el mismo que el anterior pero excluyendo el punto A(a,b) es decir es el conjunto de puntos P(x,y) del E^2 tales que

$$0 < |x - a| < d$$
$$0 < |y - b| < d$$

CLASIFICACION DE PUNTOS

Punto aislado

Un punto de un conjunto se llama aislado cuando hay algún entorno suyo que no contiene otros puntos del conjunto que el mismo.

Por ejemplo si llamamos Z al conjunto de los números enteros, el conjunto definido por : $S = \{ P(x,y) / x \in Z \wedge y \in Z \}$ está formado solamente por puntos aislados

Punto de acumulación

Un punto pertenezca o no a un conjunto S, se llama punto de acumulación de S, cuando en todo entorno reducido suyo hay puntos del conjunto S.

Si definimos a $S = \{ P(x,y) / (x)^2 + (y)^2 < 1 \}$

Todos los puntos de S son de acumulación y los de la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = 1$ también, ya que si bien no pertenecen a S en todo entorno suyo hay puntos que pertenecen a S

Punto interior

Un punto perteneciente a un conjunto S se llama "punto interior" de S cuando hay por lo menos un entorno suyo, cuyos puntos todos pertenecen a S.

Interior de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos interiores del conjunto

Punto exterior

Un punto no perteneciente a un conjunto S se llama "punto exterior" de S cuando hay por lo menos un entorno suyo, cuyos puntos ninguno pertenecen a S

Exterior de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos exteriores del conjunto

Punto frontera

Un punto pertenezca o no a un conjunto S, se llama frontera de S si no es exterior ni interior a S, es decir, en todo entorno suyo, hay puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S.

Si definimos a $S = \{ P(x,y) / (x)^2 + (y)^2 < 1 \}$

Los puntos de la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = 1$ son puntos frontera de S ya que en todo entorno suyo hay puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S.

Frontera de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos fronteras del conjunto

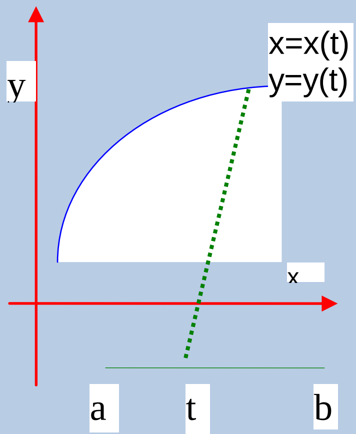
Contorno de un conjunto

Es el conjunto de los puntos no exteriores que son puntos de acumulación de puntos exteriores

Si definimos a $S = \{ P(x,y) / (x)^2 + (y)^2 < 1 \wedge y \# 0 \}$

La frontera es la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = 1$ con $y = 0$ mientras que el contorno es solamente $(x)^2 + (y)^2 = 1$

Arco de curva simple de Jordan



Una curva es una función de un solo parámetro

$x = x(t)$

$y = y(t)$ (relaciones paramétricas de una curva)

Los puntos de la curva se obtienen dando valores al parámetro t

En este caso, definimos que $a < t < b$

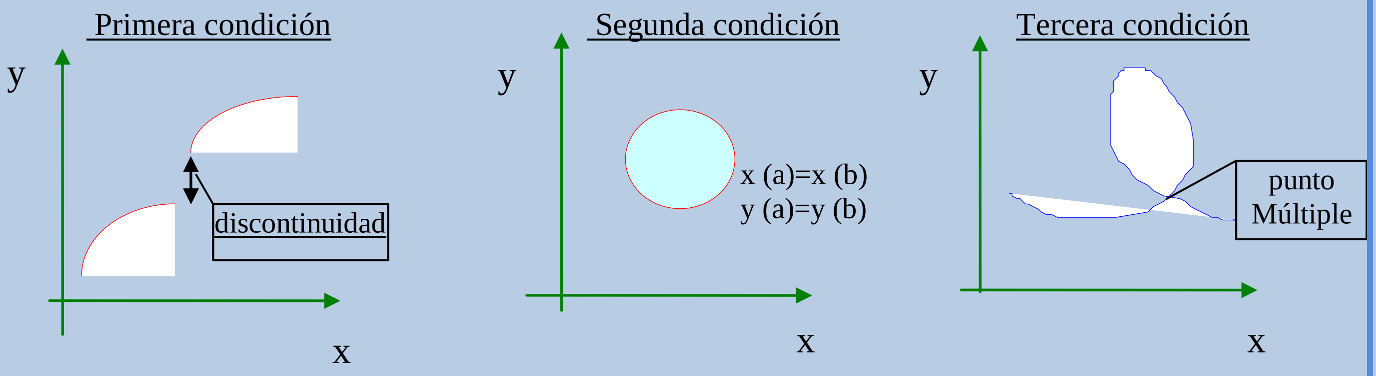
Se llama Arco de Curva Simple de Jordan si :

1) $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son funciones continuas del parámetro t

2) La curva debe ser abierta, los extremos no pueden coincidir, por lo que los puntos extremos $[x(a),y(a)]$ y $[x(b),y(b)]$ no son iguales.

3) Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la curva y los puntos del intervalo $a < t < b$ del parámetro t

Intuitivamente, lo que se pretende es que sea una curva continua (1ra.condición), abierta (2da. condición) y que no tenga puntos múltiples (3ra condición). Es decir que no se presenten las siguientes condiciones.

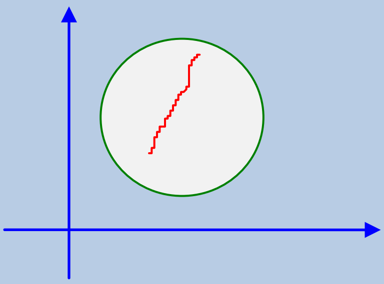


CONEXION DE CONJUNTOS

Conjunto conexo

Un conjunto S se llama conexo cuando dos puntos cualesquiera del mismo se pueden unir por un arco de curva simple de Jordan cuyos puntos todos pertenecen al conjunto S.

S



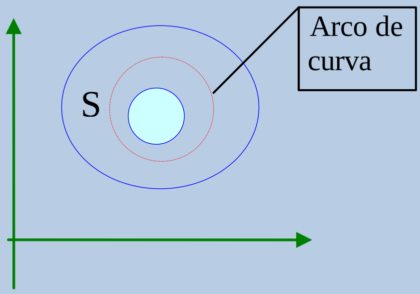
Conjunto simplemente conexo

Un conjunto S es simplemente conexo cuando para toda curva simple cerrada de Jordan perteneciente a S la región interior pertenece a S.

Es evidente que para que un conjunto sea simplemente conexo, debe ser conexo, pero no todo conjunto conexo es simplemente conexo

Ejemplo :

Sea $S = \{ P(x,y) \,/\, r^2 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2 \}$



Este conjunto es conexo, puesto que dos puntos cualesquiera de ellos se puede unir por un arco de curva simple de Jordan cuyos puntos todos pertenecen a S pero no es simplemente conexo

pues si se traza una curva cerrada de Jordan de un radio intermedio entre r y R la región interior a la curva cerrada no está totalmente incluida en S.
Este conjunto es doblemente conexo
En general el orden de conexión de un conjunto conexo lo determina el número de curvas que forman su contorno.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Funciones de dos variables independientes

Se dice que una variable z es función de las variables x e y cuando a cada par ordenado de valores (x,y) le corresponde uno y solo un valor determinado de la variable z
Se simboliza z = f (x,y)

Dominio de la función

Es el conjunto de pares de valores que pueden tomar las variables x e y para los cuales la función z = f(x,y) está definida

Rango de la función

Es el conjunto de los valores de z que son imágenes de los pares ordenados (x,y) perteneciente al dominio de la función.

Funciones de varias variables independientes

Se dice que la variable " y " es función de las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ cuando a cada n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de valores de las n variables independientes le corresponde uno y solo un valor determinado de " y " se simboliza : $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

Curvas de nivel

Se define como curva de nivel de una superficie z = f (x,y) a la proyección sobre el plano "xy" de la curva que resulta de interceptar la superficie z = f(x,y) con un plano z = constante de ecuación z = k paralelo al plano "xy"

Superficie de nivel

Dada una función U=f(x,y,z) se denomina superficie de nivel a las que se obtienen haciendo f(x,y,z) = k siendo k un valor constante y representándolas en el espacio (xyz)